

Un enfoque algebraico-diferencial para la estimación de las corrientes del rotor en el motor de inducción.

Flor Silva, Carlos García, Alejandro Rodríguez.

Departamento de Control Automático
Cenidet, Interior Internado Palmira s/n, Cuernavaca, Morelos.
e-mail: fsilvac_28@hotmail.com, cdgarcia_mx@yahoo.com, omegarnx@yahoo.com.

Resumen. Este trabajo presenta un observador no lineal basado en la condición de observabilidad algebraica, que se obtiene a través de la estimación algebraica de las derivadas de orden finito de las señales de entrada y salida del sistema. Para manipular las variables del sistema y sus derivadas se usan conceptos de álgebra diferencial. Para ilustrar la metodología de diseño de los observadores algebraicos se estiman las corrientes del rotor en el modelo del motor de inducción jaula de ardilla basado en corrientes y voltajes de estator.

Palabras clave: Estimación de estados, observador algebraico, reconstructor de estado, álgebra diferencial, motor de inducción jaula de ardilla.

1 Introducción

Diseñar un observador no lineal puede resultar una tarea difícil. Desde el punto de vista teórico tales dificultades provienen de: (i) singularidades dentro del mapeo de observación; (ii) que la propiedad de observabilidad dependa de la entrada; y (iii) la necesidad de observadores de orden extendido en los casos donde determinar observabilidad no cumple ante el criterio del rango completo de la matriz. Desde el punto de vista práctico las razones son: a) la presencia de perturbaciones y el ruido en las mediciones; y b) la falta de precisión en el modelo y en las condiciones iniciales no conocidas.

En este artículo se considera el enfoque algebraico diferencial introducido por Fliess [4], y aplicado en [6], [7] y [8]. Desde esta perspectiva las variables de un sistema se pueden expresar en términos de las entradas, de las salidas y de un conjunto de sus derivadas de orden finito con respecto al tiempo.

La estimación de las derivadas está basada en la serie de Taylor truncada de la señal analítica. Utilizando la derivada algebraica es posible eliminar la influencia de los valores iniciales en la estimación [8]. Dicha estimación se realiza a partir de un filtro lineal, variante en el tiempo junto con una ecuación de salida singular, esto permite que la estimación sea robusta ante perturbaciones y ruido de medición. La estimación de los estados se define en términos de un problema de observación, y se realiza parametrizando los estados en función de las señales conocidas.

La metodología se basa en conceptos de álgebra diferencial, lo que hace posible la manipulación de sistemas polinomiales de ecuaciones diferenciales de manera sistemática. El reconstructor de estados hace uso de un observador no lineal llamado

*M.A. Moreno, C.A. Cruz, J. Álvarez, H. Sira (Eds.)
Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering
Research in Computing Science 36, 2008, pp. 75-84*

observador algebraico, el cual posee una metodología de diseño más sencilla con respecto a los observadores de entradas desconocidas. Para implementarse se requiere que cumpla la condición de observabilidad algebraica. El principal resultado es la estimación de las corrientes del rotor en el motor de inducción tipo Jaula de ardilla.

2 Álgebra Diferencial

El álgebra diferencial es una rama de las matemáticas que utiliza métodos del álgebra abstracta para estudiar las soluciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales parciales y ecuaciones ordinarias polinomiales no lineales. Ésta es una generalización del álgebra conmutativa clásica y está basada principalmente en los trabajos de Ritt [9] y Kolchin [5], de donde se citan las siguientes definiciones.

Definición 1. Se dice que un campo conmutativo K de característica cero, es un *campo diferencial* si la operación de derivación está definida en él. Entonces, para cualesquiera dos elementos a y b que pertenecen al campo K , se tiene que:

$$1. \frac{d}{dt}(a + b) = \dot{a} + \dot{b} \qquad 2. \frac{d}{dt}(ab) = \dot{a}b + a\dot{b}$$

Se dice que un elemento $c \in K$, donde K es un campo diferencial, es una *constante* si se verifica que $\dot{c} = 0$. El conjunto de las constantes de K es un subcampo de K y se le llama el campo de constantes.

Un campo puede estar incluido en otro campo más grande. A esto, formalmente, se le denomina extensión de campo.

Definición 2. Una *extensión de campo diferencial*, denotada por L/K , donde K y L son campos diferenciales, satisface las condiciones siguientes: i) K es un subcampo de L , ($K \subseteq L$) y ii) La diferenciación en K es la restricción de la diferenciación de L en K .

Definición 3. Se dice que una *extensión de campos diferenciales* L/K está generada finitamente si existe un subconjunto $S \subset L$ tal que $L = K\langle S \rangle$, es decir, L está generado por el campo diferencial K y los elementos de S .

Ejemplo. $\mathbb{R}\langle e^t \rangle / \mathbb{R}$ es una extensión de campos diferenciales, ya que $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}\langle e^t \rangle$.

En la resolución de las ecuaciones polinomiales definidas en un campo es fundamental determinar si sus raíces también pertenecen a dicho campo. Cuando este no es el caso, se necesita el concepto de extensión de campo para poder incluir en este nuevo campo tanto a los coeficientes del polinomio como a sus raíces. Si sucede que los elementos de un campo arbitrario son raíces de alguna ecuación polinomial, entonces se dice que éstos son algebraicos; en caso contrario se les designa como elementos trascendentes. Para el caso diferencial formalmente tenemos las siguientes definiciones:

Definición 4. Se dice que un elemento $\xi \in L$ es *algebraico diferencialmente* sobre K si, y sólo si, satisface una ecuación algebraica diferencial $P(\xi, \dot{\xi}, \dots, \xi^{(n)}) = 0$ donde P es un polinomio sobre K en la indeterminada ξ y un número finito de sus derivadas. La extensión L/K es algebraica diferencialmente si, y sólo si, cualquier elemento de L es algebraico diferencialmente sobre K .

Se dice que un elemento $a \in L$ es *trascendental diferencialmente* sobre K si, y sólo si, éste no es algebraico diferencialmente sobre K . La extensión L/K es trascendental

diferencialmente si, y sólo si, existe por lo menos un elemento de L que es trascendental diferencialmente sobre K . Que un elemento $a \in L$ sea trascendental diferencialmente sobre K significa que no existe sobre K una ecuación algebraica diferencial para la cual a es una de sus raíces.

3 Condición de Observabilidad Algebraica

El concepto de *observabilidad algebraica* es consecuencia de que la extensión de campo diferencial $G/k(u, y)$ sea algebraica, es decir, la información diferencial completa está contenida en $k(u, y)$.

Que la extensión de campo diferencial sea algebraica significa que todos los elementos de G son algebraicos sobre el campo $k(u, y)$, es decir, toda la información del sistema se puede observar a partir de las entradas y de las salidas del mismo.

Como ejemplo, considere el sistema de control polinomial, no lineal de la forma:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(x, u) \\ y(t) = h(x, u) \end{cases} \quad (1)$$

donde $x(t) = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u(t) = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas, $y(t) = (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$ es el vector de salidas medibles. A y h son funciones polinomiales, respectivamente.

Si las ecuaciones obtenidas mediante diferenciación de las funciones de salida, sólo contienen expresiones polinomiales, esto permite usar una nueva definición de observabilidad basada en la siguiente idea: *la variable de estado x_i , $i = 1, \dots, n$ es observable si, y sólo si, existe una relación algebraica que asocie a cada x_i con las entradas, las salidas y un número finito de sus derivadas con respecto al tiempo. Si cada x_i es la solución de una ecuación polinomial en $U = (U^{(0)}, U^{(1)}, \dots)$ y en $Y = (Y^{(0)}, Y^{(1)}, \dots)$, entonces se sabe que dado un mapeo entrada-salida, éste corresponde localmente a un único estado del sistema [1].* Como ejemplo, considérese el siguiente sistema que se presenta en [6]:

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t)x_2^2(t)u_1(t) \\ \dot{x}_2 = x_1(t)u_2(t) \\ \dot{x}_3 = x_2(t) \end{cases} \quad y(t) = x_2 \quad (2)$$

En este caso se tiene un sistema observable, ya que los estados $x_1(t)$ y $x_2(t)$ satisfacen las siguientes ecuaciones polinomiales

$$P_1(x_2) = x_2 - y = 0, \quad P_2(x_1) = u_2 x_1 - \dot{y} = 0, \quad u, y \neq 0 \quad (3)$$

Por lo tanto, los estados $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son observables algebraicamente sobre $\mathbb{R}(u, y)$, de acuerdo con la siguiente definición.

Definición 5 [2]. Para el sistema (1) un estado es observable algebraicamente con respecto a $K(u, y)$, si éste es algebraico sobre $K(u, y)$. Cualquier dinámica con salida y es observable algebraicamente si, y sólo si, algún estado tiene esta propiedad.

4 Análisis del Modelo del Motor de Inducción con Resistencias Explícitas

En esta sección se presenta el resumen del análisis del modelo del motor de inducción con resistencias explícitas y se determina la condición de observabilidad algebraica [3] para este sistema considerando lo que se mencionó en la sección anterior.

4.1 Características del Motor de Inducción

El modelo del motor de inducción, descrito más adelante por (12), que se considera en este análisis tiene la característica de mantener explícitos los valores de las resistencias de cada uno de los devanados del motor. En notación matricial el modelo del motor de inducción trifásico (subsistema eléctrico), se expresa por

$$V_s^{abc} = R_s^{abc} I_s^{abc} + \frac{d(\lambda_s^{abc})}{dt} \quad V_r^{abc} = R_r^{abc} I_r^{abc} + \frac{d(\lambda_r^{abc})}{dt} \quad (4)$$

donde

$$\begin{aligned} v_s^{abc} &= [v_{as} \ v_{bs} \ v_{cs}]^T, \quad v_r^{abc} = [v_{ar} \ v_{br} \ v_{cr}]^T, \quad I_s^{abc} = [I_{as} \ I_{bs} \ I_{cs}]^T, \\ \lambda_s^{abc} &= [\lambda_{as} \ \lambda_{bs} \ \lambda_{cs}]^T, \quad \lambda_r^{abc} = [\lambda_{ar} \ \lambda_{br} \ \lambda_{cr}]^T, \quad I_r^{abc} = [I_{ar} \ I_{br} \ I_{cr}]^T. \\ R_s^{abc} &= R_s I_{3 \times 3} \quad R_r^{abc} = R_r I_{3 \times 3} \end{aligned}$$

Aquí, a, b, c son las variables trifásicas; $\lambda_{as}, \lambda_{bs}, \lambda_{cs}$ son los enlaces de flujo trifásicos en el estator; $\lambda_{ar}, \lambda_{br}, \lambda_{cr}$ son los enlaces de flujo trifásicos en el rotor; I_{as}, I_{bs}, I_{cs} son las corrientes trifásicas de estator; I_{ar}, I_{br}, I_{cr} son las corrientes trifásicas de rotor; R_s y R_r son las resistencias de estator y rotor, respectivamente; v_{as}, v_{bs}, v_{cs} son los voltajes de estator y v_{ar}, v_{br}, v_{cr} son los voltajes de rotor, para este caso son cero.

Por medio de la teoría del marco de referencia se realiza un cambio de variables trifásicas (abc) a bifásicas ($qd0$) por medio del cual es posible encontrar un modelo del motor de inducción más simple y equivalente al modelo trifásico. La transformación de variables trifásicas a bifásicas se lleva a cabo en el marco de referencia fijo al estator (Transformación de Park) [10]. Este cambio permite eliminar los términos de las inductancias que dependen explícitamente de la posición del rotor.

El modelo del motor de inducción trifásico, descrito por (4), al transformarse en el marco de referencia arbitrario se convierte en

$$\begin{aligned} K_{qd0}(\theta) v_s^{abc} &= K_{qd0}(\theta) R_s^{abc} K_{qd0}^{-1}(\theta) I_s^{abc} + K_{qd0}(\theta) p [K_{qd0}^{-1}(\theta) K_{qd0}(\theta) \lambda_s^{abc}] \\ K_{qd0}(\theta - \theta_r) v_r^{abc} &= K_{qd0}(\theta - \theta_r) R_r^{abc} K_{qd0}^{-1}(\theta - \theta_r) I_r^{abc} + K_{qd0}(\theta - \theta_r) p [K_{qd0}^{-1}(\theta - \theta_r) K_{qd0}(\theta - \theta_r) \lambda_r^{abc}] \end{aligned} \quad (5)$$

donde

$$K_{qd0}(\theta) = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos(\theta - 2\pi/3) & \cos(\theta + 2\pi/3) \\ \sin \theta & \sin(\theta - 2\pi/3) & \sin(\theta + 2\pi/3) \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

es la matriz de transformación, θ es la posición del marco de referencia, y θ_r es el desplazamiento angular del rotor. Las expresiones en (5), se reducen a

$$v_s^{qd0} = k_{qd0}(\theta) v_s^{abc} = k_{qd0}(\theta) R_s^{abc} k_{qd0}^{-1}(\theta) I_s^{qd0} + \omega \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda_s^{qd0} + p \lambda_s^{qd0} \quad (7)$$

$$v_r^{qd0} = k_{qd0}(\theta - \theta_r) v_r^{abc} = k_{qd0}(\theta - \theta_r) R_r^{abc} k_{qd0}^{-1}(\theta - \theta_r) I_r^{qd0} + (\omega - \omega_r) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda_r^{qd0} + p \lambda_r^{qd0} \quad (8)$$

donde V_s^{qd0}, V_r^{qd0} son los vectores de voltajes tanto de estator como de rotor en el marco de referencia; $\lambda_s^{qd0}, \lambda_r^{qd0}$ son los vectores de los enlaces de flujo tanto de estator como de rotor en el marco de referencia; ω es la velocidad del marco de referencia; mientras que ω_r es la velocidad del rotor y p es el operador diferencial d/dt .

Se consideran resistencias desiguales en los devanados de estator y de rotor, con el fin de dejar explícitos los valores de éstas en el modelo del motor [10], así resulta

$$k_{qd0}(\theta) R_s^{abc} k_{qd0}^{-1}(\theta) = k_{qd0}(\theta) \begin{bmatrix} R_{sa} & 0 & 0 \\ 0 & R_{sb} & 0 \\ 0 & 0 & R_{sc} \end{bmatrix} k_{qd0}^{-1}(\theta) \\ = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}R_{sa} + \frac{1}{6}R_{sb} + \frac{1}{6}R_{sc} & \frac{\sqrt{3}}{6}(R_{sb} - R_{sc}) & \frac{2}{3}R_{sa} - \frac{1}{3}R_{sb} - \frac{1}{3}R_{sc} \\ \frac{1}{6}(R_{sb} - R_{sc}) & \frac{1}{2}(R_{sb} + R_{sc}) & \frac{\sqrt{3}}{3}(R_{sb} - R_{sc}) \\ \frac{1}{3}R_{sa} - \frac{1}{6}R_{sb} - \frac{1}{6}R_{sc} & -\frac{\sqrt{3}}{6}(R_{sb} - R_{sc}) & \frac{1}{3}(R_{sa} + R_{sb} + R_{sc}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{s11} & R_{s12} & R_{s13} \\ R_{s21} & R_{s22} & R_{s23} \\ R_{s31} & R_{s32} & R_{s33} \end{bmatrix} \quad (9)$$

De la misma manera, se obtiene la matriz de resistencias para el rotor

$$k_{qd0}(\theta) R_r^{abc} k_{qd0}^{-1}(\theta) = \begin{bmatrix} R_{r11} & R_{r12} & R_{r13} \\ R_{r21} & R_{r22} & R_{r23} \\ R_{r31} & R_{r32} & R_{r33} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Sustituyendo (9) y (10) en (5), se tiene

$$\begin{bmatrix} v_{qs} \\ v_{qs} \\ v_{qs} \\ v_{qs} \\ v_{qs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega & 0 & 0 & 0 \\ -\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\omega - \omega_r) \\ 0 & 0 & 0 & -(\omega - \omega_r) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_s & 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & L_s & 0 & 0 & M \\ 0 & 0 & L_r & 0 & 0 \\ M & 0 & 0 & L_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{qs} \\ I_{ds} \\ I_{0s} \\ I_{qr} \\ I_{dr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{s11} & R_{s12} & R_{s13} & 0 & 0 \\ R_{s21} & R_{s22} & R_{s23} & 0 & 0 \\ R_{s31} & R_{s32} & R_{s33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{r11} & R_{r12} \\ 0 & 0 & 0 & R_{r21} & R_{r22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{qs} \\ I_{ds} \\ I_{0s} \\ I_{qr} \\ I_{dr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_s & 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & L_s & 0 & 0 & M \\ 0 & 0 & L_r & 0 & 0 \\ M & 0 & 0 & L_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{qs} \\ I_{ds} \\ I_{0s} \\ I_{qr} \\ I_{dr} \end{bmatrix} \quad (11)$$

donde v_{qs}, v_{ds}, v_{0s} son los voltajes de los devanados del estator; v_{qr}, v_{dr}, v_{0r} son los voltajes de los devanados del rotor; M es la inductancia mutua entre los devanados de estator y de rotor; I_{qs}, I_{ds}, I_{0s} son las corrientes de los devanados de estator en el marco de referencia; I_{qr}, I_{dr}, I_{0r} son las corrientes de los devanados del rotor en el marco de referencia; L_s y L_r son las inductancias de los devanados de estator y de rotor; L_{ls} y L_{lr} son las inductancias de dispersión de los devanados de estator y rotor.

En notación matricial, (11) se expresa como $V = (WL + R)I + LpI$. Al despejar las corrientes del motor de inducción de la expresión matricial se obtiene $pI = -L^{-1}[LW + R]I + L^{-1}V$.

La suposición de que los circuitos están balanceados permite descartar la secuencia cero. Así, el modelo del motor de inducción en función de las corrientes en el marco de referencia fijo al estator y considerando resistencias desiguales en los devanados del motor se presenta a continuación [10]

$$\begin{aligned} \dot{I}_{qs} &= -\xi(L_r R_{s11})I_{qs} + (-\xi L_r R_{s12} - \xi M^2 n p \omega_r)I_{ds} + \xi M R_{r11}I_{qr} + \xi(R_{r12} - n p \omega_r L_r)MI_{dr} + \xi L_r v_{qs}; \\ \dot{I}_{ds} &= \xi(-L_r R_{s21} + M^2 n p \omega_r)I_{qs} - \xi L_r R_{s22}I_{ds} + \xi M(n p \omega_r L_r + R_{r21})I_{qr} + \xi M R_{r22}I_{dr} + \xi L_r v_{ds}; \\ \dot{I}_{qr} &= \xi M R_{r11}I_{qs} + \xi(R_{r12} + L_r n p \omega_r)MI_{ds} - \xi L_r R_{r11}I_{qr} + \xi L_r(n p \omega_r L_r - R_{r12})I_{dr} - \xi M v_{qr}; \\ \dot{I}_{dr} &= \xi(R_{r21} - L_r n p \omega_r)MI_{qs} + \xi M R_{r22}I_{ds} + \xi L_r(-n p \omega_r L_r - R_{r21})I_{qr} - \xi L_r R_{r22}I_{dr} - \xi M v_{dr}; \\ \dot{\omega}_r &= \frac{3}{2} n p \frac{M}{J}(I_{qs}I_{dr} - I_{qr}I_{ds}) - \frac{B\omega_r}{J} - \frac{T_L}{J}; \end{aligned} \quad (12)$$

donde R_{sij}, R_{rij} son las resistencias de estator y rotor respectivamente para $ij=1...3$ de acuerdo con las expresiones (9) y (10); $\xi = 1/(L_s L_r - M^2)$; n_p es el número de pares de polos del motor; τ_L es el par de carga; B es el coeficiente de fricción viscosa; J es la inercia total; ω_r es la velocidad mecánica del rotor; $I_{qs}, I_{ds}, I_{qr}, I_{dr}$ son las corrientes de estator y rotor en el marco de referencia; v_{ds}, v_{qs} son los voltajes de alimentación en el marco de referencia. Los estados del sistema son las corrientes del estator, del rotor y la velocidad del rotor. Las salidas medibles son las corrientes del estator (I_{qs} e I_{ds}) y la velocidad ω_r , es decir $y_1 = I_{qs}$, $y_2 = I_{ds}$, $y_3 = \omega_r$.

4.2 Condición de Observabilidad Algebraica para el Motor de Inducción.

Para el caso del modelo del motor de inducción descrito por el sistema (12), se tiene un sistema observable algebraicamente, ya que los estados I_{qs} , I_{ds} y ω_r satisfacen las siguientes ecuaciones

$$P_1(I_{qr}) = I_{qr} - y_1 = 0, \quad (13)$$

$$P_2(I_{dr}) = I_{dr} - y_2 = 0, \quad (14)$$

$$P_3(\omega_r) = \omega_r - y_3 = 0, \quad y_i \neq 0, \quad i = 1, \dots, 3 \quad (15)$$

Los estados I_{qr}, I_{dr} se obtienen de (24) y (25). Por lo tanto, los estados $I_{qs}, I_{ds}, I_{qr}, I_{dr}$ y ω_r son observables algebraicamente sobre $\mathbb{R}(u, y)$, y, de acuerdo con la definición 5, el sistema del motor de inducción (12) es observable algebraicamente.

5 Estimación Algebraica de las Derivadas

En esta sección se presenta la ecuación del filtro lineal, variante en el tiempo, basado en el desarrollo presentado en [8], con la ecuación de salida, que permiten la estimación de las derivadas con respecto al tiempo de una señal analógica medida.

Una señal temporal, analítica $y(t)$, se puede aproximar después de algunos instantes de tiempo t_i mediante una expansión en una serie de Taylor truncada como sigue

$$\tilde{y}(t) = \sum_{j=1}^k \frac{1}{(j-1)!} y^{(j-1)}(t_i) (t-t_i)^{j-1} 1(t-t_i) \quad (16)$$

Esta serie de potencias se interpreta como k veces la integración del sistema sin entradas y condiciones iniciales $y^{(j-1)}(t_i)$, con $j = 1, 2, \dots, k$, donde k es el orden de aproximación. Aplicando cálculo operacional y la fórmula de Leibniz es posible obtener un sistema lineal triangular de ecuaciones para calcular los estimados de las derivadas de la señal $y(t)$. (El desarrollo completo se presenta en [8], sección II).

Es posible obtener la siguiente fórmula recursiva para determinar las derivadas $y^{(\delta)}(t)$ de la señal $y(t)$, donde $1 \leq \delta \leq k-1$ y $m = k - \delta - i$,

$$y^{(\delta)}(t) = \sum_{l=0}^{k-\delta} \underbrace{\binom{k}{\delta-l} \frac{(k-l-1)!}{(k-\delta-1)!} (-1)^{l-\delta+1} \frac{1}{t^{l-\delta+1}}}_{=: a(k, \delta, l)} \tilde{y}^{(l)} + \sum_{m=0}^{k-\delta} \underbrace{\binom{k}{m+\delta} (-1)^{m+\delta} \frac{(m+\delta)!}{t^{m+\delta}}}_{=: b(k, \delta, m)} \int_{t_i}^{(t)} t^{l-\delta} \tilde{y}(t) \quad (17)$$

Este sistema lineal de ecuaciones se interpreta como un filtro lineal variante en el tiempo con entradas variantes en el tiempo, que se expresa de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{z}_i(k, t) &= b(k, i, 1) t^{i-1} y(t) + z_{i+1}(k, t), & i &= 1, \dots, k-2 \\ \dot{z}_{k-1}(k, t) &= b(k, k-1, 1) y(t). \end{aligned} \quad (18)$$

Al introducir los estados del filtro $z_i(k, t)$ a partir de la ecuación (18) se puede formular una ecuación para calcular las estimaciones de las derivadas

$$\tilde{y}^{(i)}(t) = \frac{(k+i-1)!}{i!(k-i-1)!} \frac{1}{t^i} y(t) + \sum_{j=1}^i \binom{k+i-j-1}{i-j} \frac{(k-j-1)!}{(k-i-1)!} \frac{1}{t^{k-j}} z_j(k, t) \quad (19)$$

donde $i = 1, \dots, d$. La Fig.1, muestra el esquema completo del reconstructor de estados, el cual está compuesto por el filtro lineal (18) junto con la ecuación de salida (19), y un observador algebraico que se obtiene parametrizando los estados del sistema en términos de las señales de salida medibles.

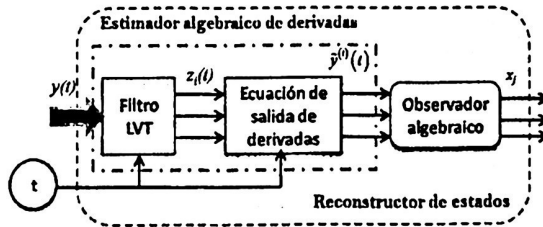


Fig. 1. Esquema completo del reconstructor de estados.

La ecuación (19) no está definida sobre el intervalo de tiempo $[0, \varepsilon)$ con ε suficientemente pequeño, así que esta ecuación es válida sólo para $t \geq \varepsilon$. Las ecuaciones del estimador algebraico de las derivadas usadas son: a) Ecuación del filtro

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1(t) &= -882r^3 y(t) + z_1(t) & \dot{z}_4(t) &= 52920r^2 y(t) + z_4(t) \\
\dot{z}_2(t) &= 7350r^4 y(t) + z_2(t) & \dot{z}_5(t) &= -35280r y(t) + z_5(t) \\
\dot{z}_3(t) &= -29400r^3 y(t) + z_3(t) & \dot{z}_6(t) &= 5040y(t)
\end{aligned} \quad (20)$$

b) Ecuación de salida para estimación de las dos primeras derivadas

$$\hat{y}(t) = \frac{42}{t} y(t) + \frac{1}{t^2} z_1(t), \quad \ddot{y}(t) = \frac{840}{t^2} y(t) + \frac{35}{t^3} z_1(t) + \frac{1}{t^2} z_2(t) \quad (21)$$

6 Diseño del Observador Algebraico para las Corrientes del Rotor

En esta sección se presenta el diseño de los observadores algebraicos para la estimación de las corrientes de rotor, I_{qr} e I_{dr} , las cuales no se encuentran disponibles para su medición.

El análisis parte del modelo del motor de inducción con resistencias explícitas, descrito por (12), este análisis consiste en encontrar una estimación para las corrientes del rotor dejando a éstas en función sólo de las salidas medibles (corrientes de estator I_{qs} e I_{ds} , y de la velocidad del rotor ω_r), de las entradas (voltajes del estator v_{qs} y v_{ds}), y de sus derivadas. El diagrama a bloques del diseño se presenta en la Fig. 2.

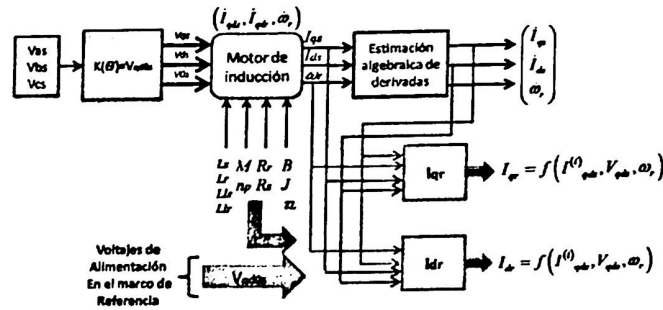


Fig. 2. Esquema de diseño de los observadores algebraicos para las corrientes del rotor.

A continuación se presenta el desarrollo de los cálculos para determinar las expresiones para la estimación de cada una de las corrientes de rotor. Se consideran los siguientes coeficientes para simplificar la manipulación de la ecuación de $\dot{I}_{qr}$ de acuerdo a (12)

$$A_1 = \xi L_r R_{11}; \quad A_2 = \xi R_{12} L_r; \quad A_3 = \xi n_p M^2; \quad A_4 = \xi M R_{11}; \quad A_5 = \xi R_{12} M; \quad A_6 = \xi n_p L_r M; \quad A_7 = \xi L_r$$

La ecuación para $\dot{I}_{qs}$ que se obtiene del modelo del motor de inducción, descrito en (12), se expresa entonces como

$$\frac{dI_{qs}}{dt} = -A_1 I_{qs} - A_2 I_{ds} - A_3 \omega_r I_{ds} + A_4 I_{qr} + A_5 I_{dr} - A_6 \omega_r I_{dr} + A_7 V_{qs} \quad (22)$$

Se consideran los siguientes coeficientes para simplificar la manipulación de la ecuación de $\dot{I}_{dr}$ de acuerdo a (12)

$$B_1 = \xi L_r R_{21}; B_2 = \xi n_p M^2; B_3 = \xi L_r R_{22}; B_4 = \xi R_{21} M; B_5 = \xi n_p L_r M; B_6 = \xi M R_{22}; B_7 = \xi L_r$$

La ecuación para I_{ds} que se obtiene del modelo del motor de inducción, descrito en (12), se expresa entonces como

$$\frac{dI_{ds}}{dt} = -B_1 I_{qs} + B_2 \omega_r I_{qs} - B_3 I_{ds} + B_4 I_{qs} + B_5 \omega_r I_{qs} + B_6 I_{ds} + B_7 V_{ds} \quad (23)$$

Para la estimación de la corriente del rotor de la fase del eje q se tiene

$$I_{qr} = \frac{\left[\frac{j_{qr}}{A_1} + \frac{A_1 I_{qs}}{A_1} + \frac{(A_2 + A_3 \omega_r) I_{ds}}{A_1} - \frac{A_2 I_{ds}}{A_1 B_6} - \frac{A_3 (B_1 - B_2 \omega_r) I_{qs}}{A_1 B_6} - \frac{A_3 B_7 I_{ds}}{A_1 B_6} + \frac{A_4 B_7 V_{ds}}{A_1 B_6} + \frac{A_4 \omega_r I_{ds}}{A_1 B_6} + \frac{A_5 \omega_r (B_1 - B_2 \omega_r) I_{qs}}{A_1 B_6} + \frac{A_5 \omega_r B_7 I_{ds}}{A_1 B_6} - \frac{A_5 \omega_r B_7 V_{ds}}{A_1 B_6} - \frac{A_7 V_{qs}}{A_1} \right]}{\left(1 - \frac{A_4 B_1}{A_1 B_6} - \frac{A_4 B_2 \omega_r}{A_1 B_6} + \frac{A_5 \omega_r B_1}{A_1 B_6} + \frac{A_5 B_2 \omega_r^2}{A_1 B_6} \right)} \quad (24)$$

Para la estimación de la corriente del rotor de la fase del eje d se tiene

$$I_{dr} = \frac{\left[\frac{j_{dr}}{B_6} + \frac{(B_1 - B_2 \omega_r) I_{qs}}{B_6} + \frac{B_1 I_{ds}}{B_6} - \frac{B_2 I_{qs}}{A_1 B_6} - \frac{B_2 A_1 I_{qs}}{A_1 B_6} - \frac{B_2 A_1 I_{ds}}{A_1 B_6} - \frac{B_2 A_1 \omega_r I_{ds}}{A_1 B_6} + \frac{A_1 B_7 V_{ds}}{A_1 B_6} - \frac{B_3 \omega_r I_{ds}}{A_1 B_6} - \frac{B_3 \omega_r A_1 I_{qs}}{A_1 B_6} - \frac{B_3 A_1 \omega_r^2 I_{ds}}{A_1 B_6} + \frac{B_3 A_1 \omega_r V_{qs}}{A_1 B_6} - \frac{V_{qs} V_{ds}}{B_6} \right]}{\left(1 - \frac{A_4 B_1}{A_1 B_6} - \frac{A_4 B_2 \omega_r}{A_1 B_6} - \frac{B_2 A_1 \omega_r}{A_1 B_6} + \frac{A_5 \omega_r^2 B_1}{A_1 B_6} \right)} \quad (25)$$

Los parámetros utilizados para la simulación del modelo se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1. Parámetros de simulación del modelo del motor de inducción Jaula de Ardilla.

Parámetro	Valor	Unidades	Parámetro	Valor	Unidades
No. polos	4	-	Xls	0.754	Ω
Frecuencia	60	Hz	Xlr	0.754	Ω
Voltaje de entrada	220	V	XM	26.13	Ω
R_s	0.435	Ω	TL	11.9	$N \cdot m$
R_r	0.316	Ω	J	0.089	$Kg \cdot m^2$

La Fig. 3 muestra las gráficas de las corrientes del rotor estimadas I_{qr} e I_{dr} , obtenidas del observador algebraico contra las que se obtienen de la salida del modelo del motor de inducción.

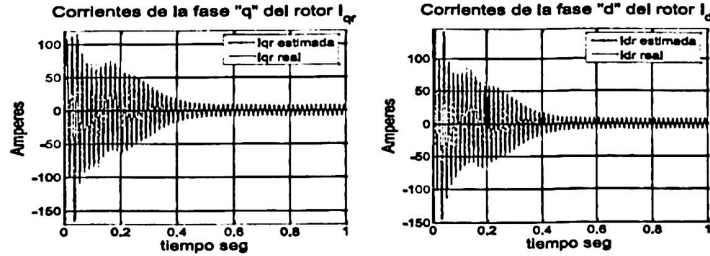


Fig. 3. Comparación de las corrientes del rotor I_{qr} e I_{dr} estimadas y "reales".

La Fig. 4 muestra la estimación de las corrientes, la cual es bastante rápida.

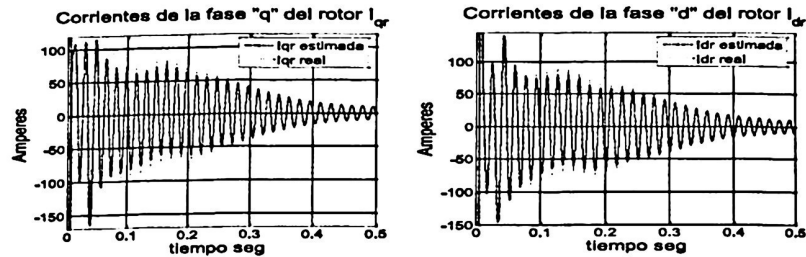


Fig. 4. Estimación rápida de las corrientes del rotor.

7 Conclusiones

Se logró resolver el problema de la estimación de las corrientes del estator para el motor de inducción tipo jaula de ardilla, empleando la condición de observabilidad algebraica y el enfoque algebraico diferencial. Se sugirió una metodología para el desarrollo de los observadores algebraicos para las corrientes y se realizaron las simulaciones convenientes. Esta metodología sugerida se presenta con miras a resolver a futuro el problema del diagnóstico y estimación de fallas en el motor de inducción.

Referencias

1. Anguelova, M.: Nonlinear observability and identifiability: General Theory and a case study of a kinetic model. PhD Thesis. Göteborg University, (2004).
2. Diop, S., Martínez-Guerra, R.: On an algebraic and differential approach of nonlinear systems diagnosis. Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, pp. 585–589. IEEE press, USA (2001).
3. Diop, S.: The algebraic theory of nonlinear observability revisited. Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, pp. 2550–2555. IEEE press, USA (2001).
4. Fliess, M.: Generalized controller canonical forms for linear and nonlinear dynamics. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 35, No. 9, 994–1001 (1990).
5. Kolchin, E.R.: Differential Algebra and algebraic groups, Academic Press, (1973).
6. Luviano, A., Martínez-Guerra, R.: Reconstrucción de fallas empleando observadores algebraicos. Congreso Nacional de Control Automático 2006, pp. 183–187. UNAM, México, D.F. (2006).
7. Martínez-Guerra, R., Diop, S.: Diagnosis of nonlinear systems using an unknown-input observer: an algebraic and differential approach. IEEE Proc. Control Theory Appl. Vol. 151, No. 1, 130–135 (2004).
8. Reger, J., Sira-Ramírez, H., Fliess, M.: On non-asymptotic observation of nonlinear systems. Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and the European Control Conference 2005, pp. 4219–4224. IEEE press, Spain (2005).
9. Ritt, J.F.: Differential algebra. American Math. Assoc. (1950).
10. Vidal, E.: Diagnóstico y reconfiguración de fallas en un motor de inducción utilizando observadores no lineales. Tesis de maestría, Cenidet, México, (2006).